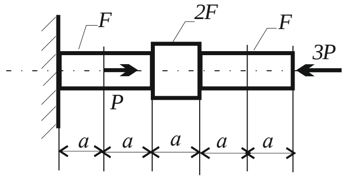
Задача на растяжение-сжатие



Задан статически определимый стержень, работающий на растяжение-сжатие. Материал стержня – сталь, модуль упругости первого рода $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа*, допускаемые напряжения принять равными $[\sigma] = 100$ *МПа*; нагрузка $P = 10$ *кН*, длины участков стержня $a = 0{,}1$ *м*. Подобрать площадь поперечного сечения F, определить полное удлинение стержня Δl. Построить эпюры продольных сил N, нормальных напряжений σ, перемещений сечений стержня Δ.

Решение

Определим продольные силы на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \le z \le 2a$

$$N_1 = -3P,$$

II участок: $2a \le z \le 3a$

$$N_2 = -3P,$$

III участок: $3a \le z \le 4a$

$$N_3 = -3P,$$

IV участок: $4a \le z \le 5a$

$$N_4 = -3P + P = -2P,$$

Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{-3P}{F}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-3P}{2F} = -1{,}5\frac{P}{F}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{-3P}{F}$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{-2P}{F}$$

Опасным участком, т.е. участком на котором возникают максимальные напряжения, являются первый и третий участки нагружения. Составим условие прочности для опасного участка:

$$\sigma_{max} = \left|\sigma_{1,3}\right| = 3\frac{P}{F} \le [\sigma]$$

Определим площадь сечения из условия прочности:

$$F \ge \frac{3P}{[\sigma]} = \frac{30000\,Н}{100 \cdot 10^6\ Па} = 3 \cdot 10^{-4}\ м^2 = 3\ см^2$$

Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{F_1}=\frac{-3P}{F}=\frac{-30000}{3\cdot 10^{-4}}\,Па=-100\,МПа$$

$$\sigma_2=\frac{N_2}{F_2}=\frac{-3P}{2F}=-1{,}5\frac{P}{F}=\frac{-15000}{3\cdot 10^{-4}}\,Па=-50\,МПа$$

$$\sigma_3=\frac{N_3}{F_3}=\frac{-3P}{F}=\frac{-30000}{3\cdot 10^{-4}}\,Па=-100\,МПа$$

$$\sigma_4=\frac{N_4}{F_4}=\frac{-2P}{F}=\frac{-20000}{3\cdot 10^{-4}}\,Па=-66{,}7\,МПа$$

Абсолютные удлинения участков стержня:

$$\Delta l_1=\frac{N_1 l_1}{E F_1}=\frac{\sigma_1 l_1}{E}=\frac{-100\cdot 10^6\cdot 2\cdot 0{,}1}{2\cdot 10^{11}}=-0{,}1\cdot 10^{-3}\,м=-0{,}1\,мм$$

$$\Delta l_2=\frac{N_2 l_2}{E F_2}=\frac{\sigma_2 l_2}{E}=\frac{-50\cdot 10^6\cdot 1\cdot 0{,}1}{2\cdot 10^{11}}=-0{,}025\cdot 10^{-3}\,м=-0{,}025\,мм$$

$$\Delta l_3=\frac{N_3 l_3}{E F_3}=\frac{\sigma_3 l_3}{E}=\frac{-100\cdot 10^6\cdot 1\cdot 0{,}1}{2\cdot 10^{11}}=-0{,}05\cdot 10^{-3}\,м=-0{,}05\,мм$$

$$\Delta l_4=\frac{N_4 l_4}{E F_4}=\frac{\sigma_4 l_4}{E}=\frac{-66{,}7\cdot 10^6\cdot 1\cdot 0{,}1}{2\cdot 10^{11}}=-0{,}033\cdot 10^{-3}\,м=-0{,}033\,мм$$

Определим абсолютное удлинение бруса, как сумму удлинения участков:

$$\Delta l=\Delta l_1+\Delta l_2+\Delta l_3+\Delta l_4=-0{,}2080\cdot 10^{-3}\,м=-0{,}208\,мм$$

Определим продольные перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

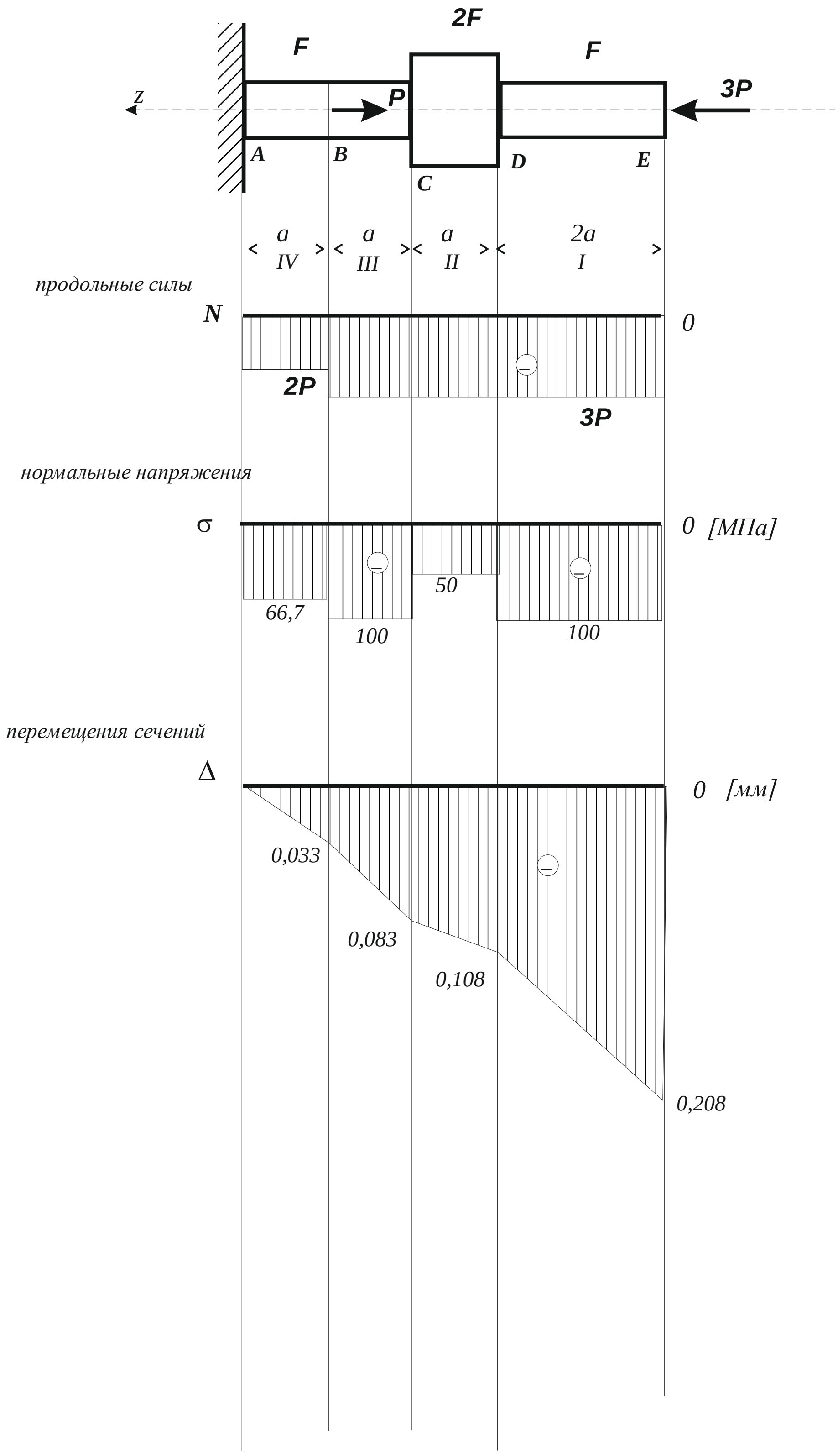
сечение *A* (жесткая заделка): $\Delta_A=0;$

сечение *B* : $\Delta_B=\Delta_A+\Delta l_4=-0{,}033\,мм;$

сечение *C*: $\Delta_C=\Delta_B+\Delta l_3=-0{,}083\,мм;$

сечение *D* : $\Delta_D=\Delta_C+\Delta l_2=-0{,}108\,мм;$

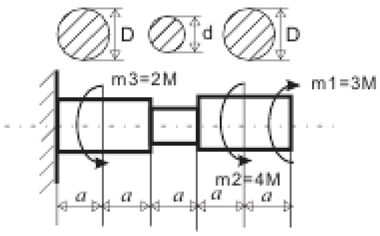
сечение *E* : $\Delta_E=\Delta_D+\Delta l_1=-0{,}208\,мм;$



2F
F
F
3P
z
P
A
B
C
D
E
a
a
a
2a
IV
III
II
I
продольные силы
N
0
2P
3P
нормальные напряжения
σ
0 [МПа]
66,7
100
50
100
перемещения сечений
Δ
0 [мм]
0,033
0,083
0,108
0,208

Задача на кручение

Задан статически определимый брус, работающий на кручение. Модуль сдвига *G=40000 МПа*, допускаемые напряжения принять равными *[τ]=100 МПа*; момент *M =10 кНм*, длины участков стержня *a=0,1 м*. Подобрать диаметры поперечного сечения *D* и *d* (*D/d=2*), определить полный угол закручивания $\varphi_{полн.}$ Построить эпюры крутящих моментов *M*, касательных напряжений на поверхности бруса *τ*, угловых перемещений сечений бруса *φ*.



Решение

Определим реактивный момент M_A, возникающий в заделке.

Уравнение равновесия бруса:

$$M_A - m_1 + m_2 + m_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = m_1 - m_2 - m_3 = -3M = -30\,кНм$$

Определим крутящие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений:

I участок ($0 \le z \le a$): $M_1 = -m_1 = -3M = -30\ кНм$

II участок ($a \le z \le 2a$): $M_2 = -m_1 + m_2 = M = 10\ кНм$

III участок ($2a \le z \le 3a$): $M_3 = -m_1 + m_2 = M = 10\ кНм$

IV участок ($3a \le z \le 4a$): $M_4 = -m_1 + m_2 = M = 10\ кНм$.

V участок ($4a \le z \le 5a$): $M_5 = -m_1 + m_2 + m_3 = 3M = 30\ кНм$.

Выразим моменты сопротивления поперечных сечений через диаметр *d (D=2d)*.

$$W_{p1} = W_{p2} = W_{p4} = W_{p5} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi (2d)^3}{16} \approx 1{,}6\,d^3;$$

$$W_{p3} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2\,d^3$$

Полярные моменты инерции сечений бруса

$$J_{p1} = J_{p2} = J_{p4} = J_{p5} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (2d)^4}{32} \approx 1{,}6\,d^4$$

$$J_{p3} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0{,}1\,d^4$$

Максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях бруса (на поверхности бруса):

$$\tau_1=\frac{M_1}{W_{p1}}=\frac{-3M}{1{,}6d^3}=-1{,}875\frac{M}{d^3}$$

$$\tau_2=\frac{M_2}{W_{p2}}=\frac{M}{1{,}6d^3}=0{,}625\frac{M}{d^3}$$

$$\tau_3=\frac{M_3}{W_{p3}}=\frac{M}{0{,}2d^3}=5\frac{M}{d^3}\qquad ;$$

$$\tau_4=\frac{M_4}{W_{p4}}=\frac{M}{1{,}6d^3}=0{,}625\frac{M}{d^3}$$

$$\tau_5=\frac{M_5}{W_{p5}}=\frac{3M}{1{,}6d^3}=1{,}875\frac{M}{d^3}$$

Опасным участком является третий участок нагружения. Составим условие прочности для опасного участка вала и определим диаметр *d* из условия прочности:

$$\tau_{max}=\tau_3=5\frac{M}{d^3}\le[\tau]$$

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{5M}{[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{5\cdot 10000}{100\cdot 10^6}}=0{,}0794\,м=79{,}4\,мм$$

$$D=2d=158{,}8\,мм$$

Вычислим касательные напряжения:

$$\tau_1=-1{,}875\frac{M}{d^3}=-1{,}875\frac{10000}{(0{,}0794)^3}=-37{,}5\cdot 10^6\ Па=-37{,}5\ МПа$$

$$\tau_2=0{,}625\frac{M}{d^3}=0{,}625\frac{10000}{(0{,}0794)^3}=12{,}5\cdot 10^6\ Па=12{,}5\ МПа$$

$$\tau_3=5\frac{M}{d^3}=5\frac{10000}{(0{,}0794)^3}=100\cdot 10^6\ Па=100\,МПа\qquad ;$$

$$\tau_4=0{,}625\frac{M}{d^3}=0{,}625\frac{10000}{(0{,}0794)^3}=12{,}5\cdot 10^6\ Па=12{,}5\ МПа$$

$$\tau_5=1{,}875\frac{M}{d^3}=1{,}875\frac{10000}{(0{,}0794)^3}=37{,}5\cdot 10^6\ Па=37{,}5\ МПа$$

Определим углы закручивания участков бруса:

$$\varphi_1 = \frac{M_1 l_1}{G J_{p1}} = \frac{-3M \cdot a}{G \cdot 1{,}6 d^4} = -1{,}875 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_2 l_2}{G J_{p2}} = \frac{M \cdot a}{G \cdot 1{,}6 d^4} = 0{,}625 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\varphi_3 = \frac{M_3 l_3}{G J_{p3}} = \frac{M \cdot a}{G \cdot 0{,}1 d^4} = 10 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\varphi_4 = \frac{M_4 l_4}{G J_{p4}} = \frac{M \cdot a}{G \cdot 1{,}6 d^4} = 0{,}625 \frac{Ma}{Gd^4};$$

$$\varphi_5 = \frac{M_5 l_5}{G J_{p5}} = \frac{3M \cdot a}{G \cdot 1{,}6 d^4} = 1{,}875 \frac{Ma}{Gd^4}$$

Полный угол закручивания бруса:

$$\varphi_{полн} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 = 11{,}25 \frac{Ma}{Gd^4} =$$

$$= 11{,}25 \frac{10000 \cdot 0{,}1}{40000 \cdot 10^6 \cdot (0{,}0794)^4} = 0{,}0071 \ рад$$

Определим угловые перемещения поперечных сечений, совпадающих с границами участков нагружения:

сечение *A* (жесткая заделка): $\varphi_A = 0;$

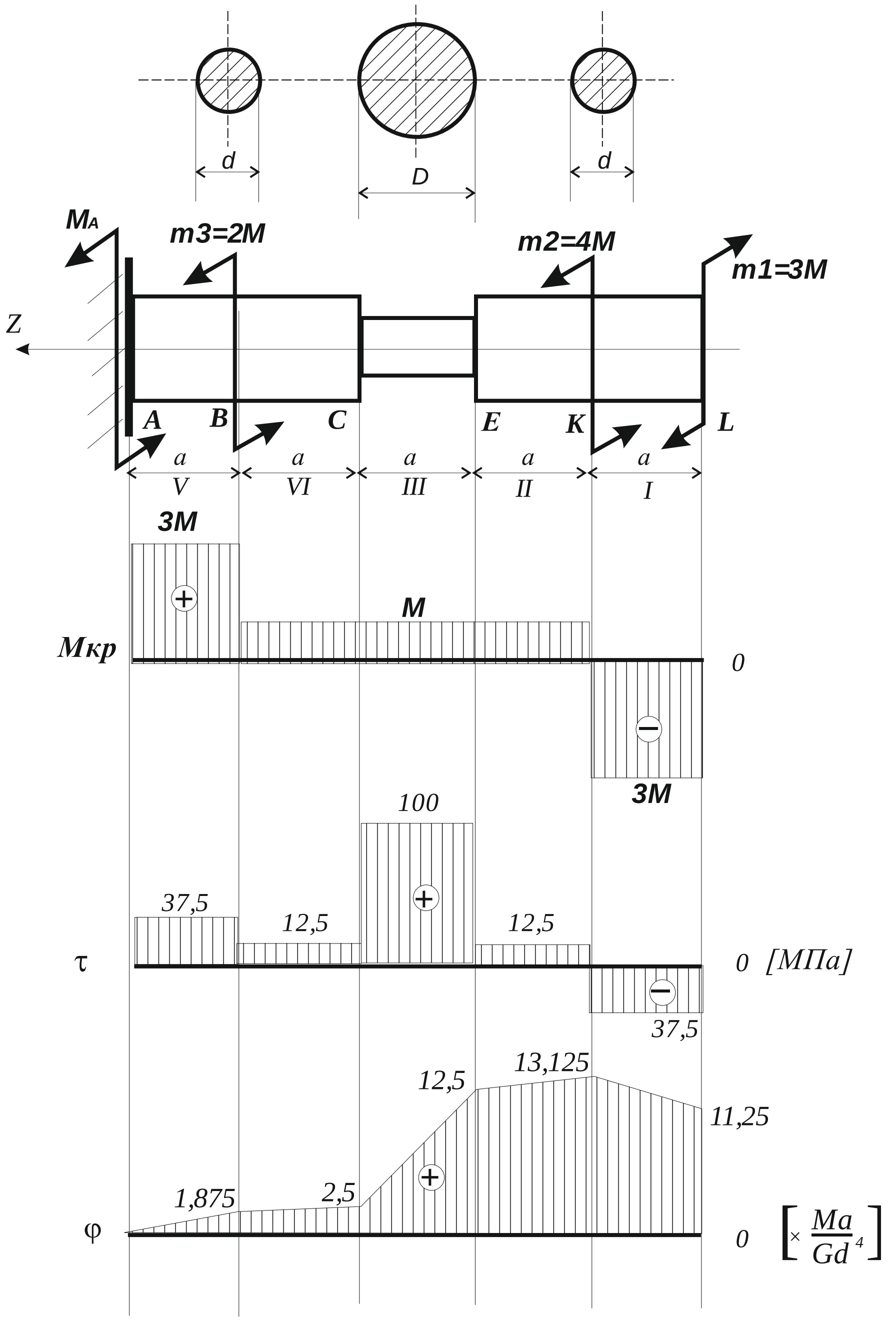
сечение *B* : $\varphi_B = \varphi_A + \varphi_5 = 1{,}875 \frac{Ma}{Gd^4};$

сечение *C*: $\varphi_C = \varphi_B + \varphi_4 = 2{,}5 \frac{Ma}{Gd^4};$

сечение *E*: $\varphi_E = \varphi_C + \varphi_3 = 12{,}5 \frac{Ma}{Gd^4};$

сечение *K*: $\varphi_K = \varphi_E + \varphi_2 = 13{,}125 \frac{Ma}{Gd^4};$

сечение *L*: $\varphi_L = \varphi_K + \varphi_1 = 11{,}25 \frac{Ma}{Gd^4} = \varphi_{полн}$

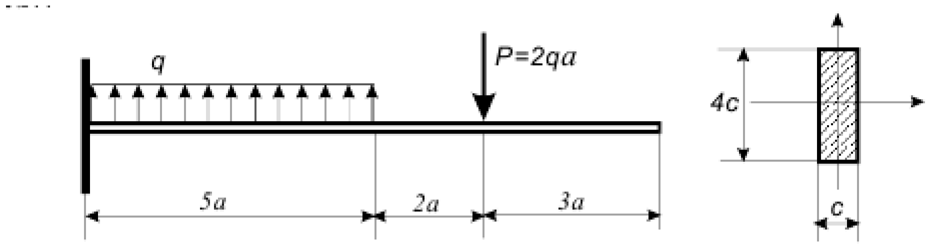


d
D
d
MA
m3=2M
m2=4M
m1=3M
Z
A
B
C
E
K
L
a
V
VI
III
II
I
3M
M
Mкр
0
3M
100
37,5
12,5
12,5
τ
0 [МПа]
37,5
13,125
12,5
11,25
1,875
2,5
φ
0
[× Ma/Gd4]

Задача на изгиб (консольная балка)

Построить эпюры внутренних силовых факторов, подобрать поперечное сечение заданной формы.

Исходные данные: *q=10кН/м, a=0,1м,[σ]=100МПа*



Для консольной балки определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, рассматривая участки балки от свободного конца к заделке.

I участок: $0 \le z \le 3a$

$$Q_1 = 0$$

$$M_1 = 0$$

II участок: $3a \le z \le 5a$

$$Q_2 = P = 2qa$$

$$M_2 = -P(z-3a) = -2qa\cdot(z-3a)$$

Тогда на границах участка

$$Q_{2(z=3a)} = 2qa \qquad Q_{2(z=5a)} = 2qa$$

$$M_{2(z=3a)} = 0 \qquad M_{2(z=5a)} = -4qa^2$$

III участок: $5a \le z \le 10a$

$$Q_3 = P - q(z-5a) = 2qa - q(z-5a)$$

$$M_3 = -P(z-3a) + q\frac{(z-5a)^2}{2} = -2qa\cdot(z-3a) + q\frac{(z-5a)^2}{2}$$

Тогда на границах участка

$$Q_{3(z=5a)} = 2qa \qquad Q_{3(z=10a)} = -3qa$$

$$M_{3(z=5a)} = -4qa^2 \qquad M_{3(z=10a)} = -14qa^2 + 12{,}5qa^2 = -1{,}5qa^2$$

Максимальное по модулю значение момента приходится на сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Определим координату сечения:

$$Q_3 = P - q(z-5a) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{P+5qa}{q} = 7a$$

Тогда $M_3^{max} = M_{3(z=7a)} = -8qa^2 + 2qa^2 = -6qa^2$

Значение момента в опасном сечении

$M_{max} = M_{3(z=7a)} = -6qa^2$ - по этому значению изгибающего момента ведется расчет на прочность.

Условие прочности

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} = \frac{6qa^2}{W_x} \le [\sigma]$$

$$\Rightarrow \qquad W_x \ge \frac{6qa^2}{[\sigma]} = \frac{6\cdot 10000\cdot 0{,}1^2}{100\cdot 10^6} = 6\cdot 10^{-6}\ \ м^3 = 6\ \ см^3$$

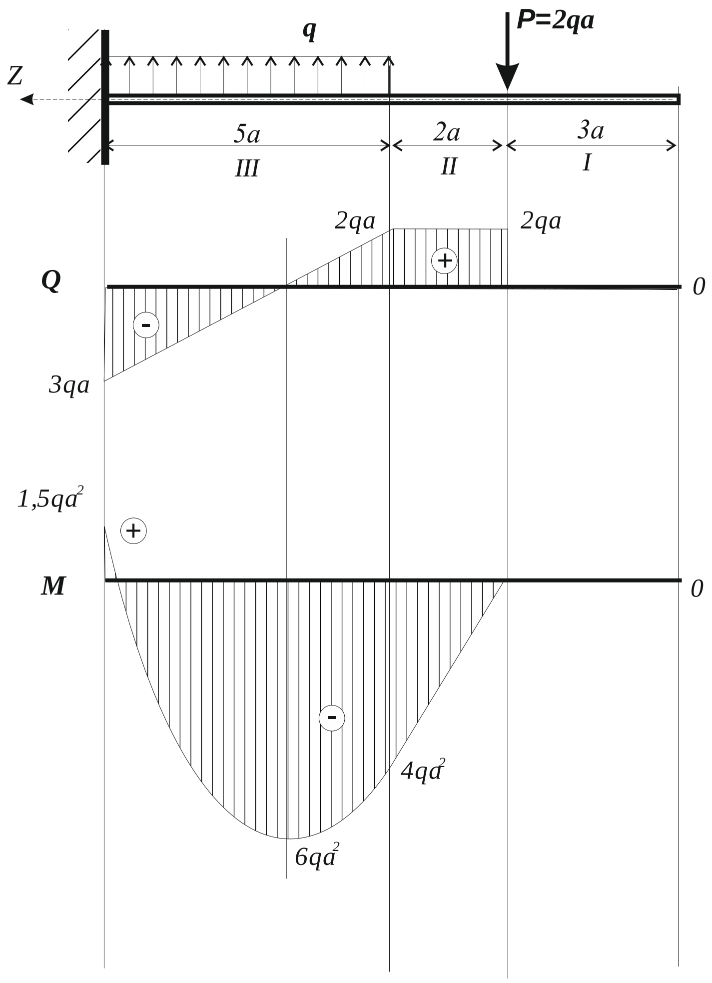
Подбор прямоугольного сечения

Осевой момент сопротивления прямоугольника (h=$4c$, b=c)

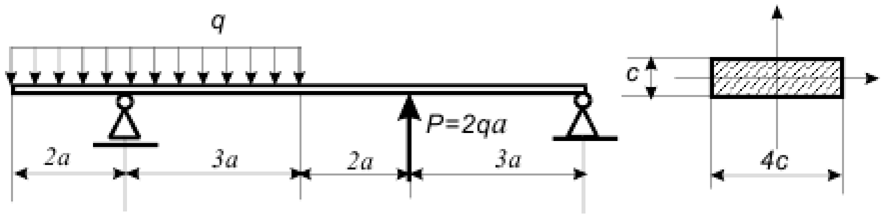
$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{c \cdot (4c)^2}{6} = \frac{8}{3}c^3$$

$$c \ge \sqrt[3]{\frac{3W_x}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 6}{8}} = 1{,}31\ см$$

площадь сечения $F = 4c^2 = 6{,}87\,см^2$



Задача на изгиб (шарнирно опертая балка)



Построить эпюры внутренних силовых факторов, подобрать поперечное сечение заданной формы.

Определим вертикальные реакции в шарнирных опорах R_A, R_B. Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum M_B^i = 0 \\ \sum M_A^i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -R_A \cdot 8a - P \cdot 3a + q \cdot 5a \cdot 7{,}5a = 0 \\ R_B \cdot 8a + P \cdot 5a - q \cdot 5a \cdot 0{,}5a = 0 \end{cases}$$

$$R_A = \frac{-P \cdot 3a + q \cdot 5a \cdot 7{,}5a}{8a} = 3{,}94qa;$$

$$R_B = \frac{-P \cdot 5a + q \cdot 5a \cdot 0{,}5a}{8a} = -0{,}94qa;$$

проверка

$$\sum Y_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R_A + R_B + P - q \cdot 5a =$$

$$= 3{,}94qa - 0{,}94qa + 2qa - 5qa = 0;$$

проверка сошлась

Определим поперечные силы и изгибающие моменты на каждом участке нагружения, пользуясь методом сечений.

I участок: $0 \le z \le 2a$ (слева)

$$Q_1 = -qz$$

$$M_1 = -\frac{qz^2}{2}$$

Тогда на границах участка

$$Q_{1(z=0)} = 0 \qquad Q_{1(z=2a)} = -2qa$$

$$M_{1(z=0)} = 0 \qquad M_{1(z=2a)} = -2qa^2$$

II участок: $2a \le z \le 5a$ (слева)

$$Q_2 = -qz + R_A$$

$$M_2 = -\frac{qz^2}{2} + R_A(z - 2a)$$

Тогда на границах участка

$$Q_{2(z=2a)} = -2qa + 3{,}94qa = 1{,}94qa \qquad Q_{2(z=5a)} = -5qa + 3{,}94qa = -1{,}16qa$$

$$M_{2(z=2a)} = -2qa^2 \qquad M_{2(z=5a)} = -12{,}5qa^2 + 3{,}94qa \cdot 3a = -0{,}68qa^2$$

Максимальное значение момента приходится на сечение, в котором поперечная сила обращается в ноль. Определим координату сечения:

$$Q_2 = -qz + R_A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{R_A}{q} = 3{,}94a$$

Тогда $$M_{2(z=3{,}94a)} = \left(-\frac{3{,}94^2}{2} + 3{,}94 \cdot 1{,}94\right) qa^2 = -0{,}12qa^2$$

IV участок: $0 \le z \le 3a$ (справа)

$Q_4 = -R_B$

$M_4 = R_B \cdot z$

Тогда на границах участка

$Q_{3(z=0)} = 0{,}94qa$ $\qquad$ $Q_{3(z=3a)} = 0{,}94qa$

$M_{3(z=0)} = 0$ $\qquad$ $M_{3(z=3a)} = -0{,}94qa \cdot 3a = -2{,}82qa^2$

III участок: $3a \le z \le 5a$ (справа)

$Q_3 = -R_B - P$

$M_3 = R_B \cdot z + P(z - 3a)$

Тогда на границах участка

$Q_{3(z=3a)} = 0{,}94qa - 2qa = -1{,}16qa$ $\qquad$ $Q_{3(z=5a)} = -1{,}16qa$

$M_{3(z=3a)} = -0{,}94qa \cdot 3a = -2{,}82qa^2$ $\qquad$ $M_{3(z=5a)} = -0{,}94qa \cdot 5a + 2qa \cdot 2a = -0{,}68qa^2$

Опасным является сечение, где момент принимает наибольшее по абсолютной величине значение,

$M_{max} = -2{,}82qa^2$, по этому значению изгибающего момента ведется расчет на прочность.

Условие прочности

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} = \frac{2{,}82qa^2}{W_x} \le [\sigma]$$

$$\Rightarrow \qquad W_x \ge \frac{2{,}82qa^2}{[\sigma]} = \frac{2{,}82 \cdot 10000 \cdot 0{,}1^2}{100 \cdot 10^6} = 2{,}82 \cdot 10^{-6}\ м^3 = 2{,}82\ см^3$$

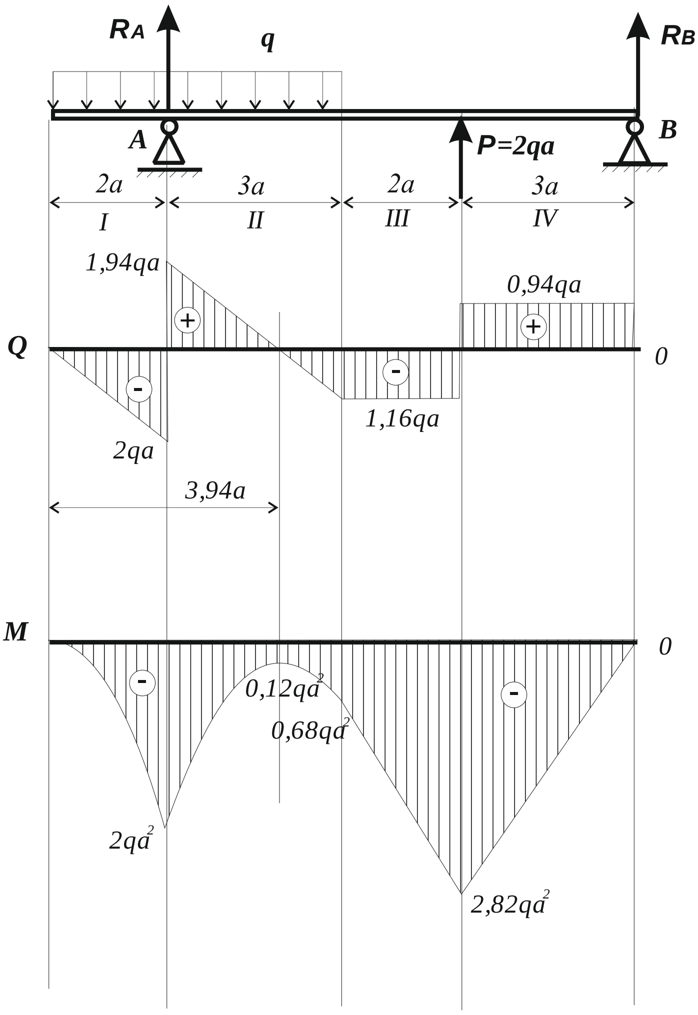
Подбор прямоугольного сечения

Осевой момент сопротивления прямоугольника ($h=c$, $b=4c$)

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{4c \cdot (c)^2}{6} = \frac{2}{3}c^3$$

$$c \ge \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2{,}82}{2}} = 1{,}62\ см$$

площадь сечения $\qquad F = 4c^2 = 10{,}50 см^2$



RA
q
RB
A
B
P=2qa
2a
3a
2a
3a
I
II
III
IV
1,94qa
0,94qa
Q
+
+
0
-
-
1,16qa
2qa
3,94a
M
0
-
-
0,12qa2
0,68qa2
2qa2
2,82qa2